5

Paralelogramos, trapezoides, medianas y puntos medios

5.1 TRAPEZOIDES

Un *trapezoide* es un cuadrilátero que tiene dos y sólo dos lados paralelos. Las *bases* del trapezoide son sus lados paralelos; los *lados* son sus partes no paralelas. La *mediana* de un trapezoide es el segmento que une a los puntos medios de sus lados.

En el trapezoide $ABCD$, de la figura 5-1, las bases son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, y sus lados son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si M y N son puntos medios, entonces $\overline{MN}$ es la mediana de un trapezoide.

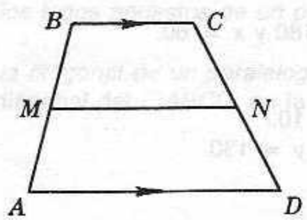
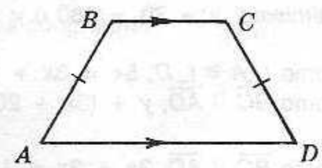


Fig. 5-1



Trapezoide isósceles

Fig. 5-2

Un *trapezoide isósceles* es un trapezoide cuyos lados son congruentes. En el trapezoide $ABCD$, en la figura 5-2, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Los *ángulos base* de un trapezoide son los ángulos de los extremos de la base mayor: $\angle A$ y $\angle D$ son los ángulos de la base del trapezoide isósceles $ABCD$.

5.1A Principios sobre Trapezoides

Principio 1: *los ángulos base de un trapezoide isósceles, son congruentes.*
En el trapezoide $ABCD$, en la figura 5-3, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\angle A \cong \angle D$

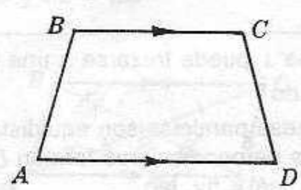
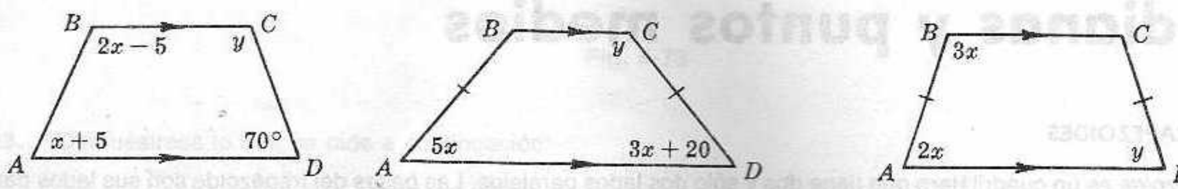


Fig. 5-3

Principio 2: *si los ángulos base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es isósceles.*
En la figura 5-3, si $\angle A \cong \angle D$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1 Álgebra aplicada a Trapezoides
En cada uno de los trapezoides, en la figura 5-4, calcule x y y.



(*a*) *ABCD* es un trapezoide (*b*) *ABCD* es un trapezoide isósceles (*c*) *ABCD* es un trapezoide isósceles

Fig. 5-4

Soluciones

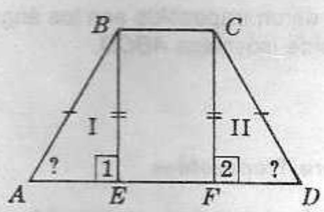
(*a*) Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $(2x - 5) + (x + 5) = 180$; entonces $3x = 180$ y $x = 60$.
Asimismo, $y + 70 = 180$ o $y = 110$.

(*b*) Como $\angle A \cong \angle D$, $5x = 3x + 20$, por lo que $2x = 20$ o $x = 10$.
Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $y + (3x + 20) = 180$, así $y + 50 = 180$ o $y = 130$.

(*c*) Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $3x + 2x = 180$ o $x = 36$.
Como $\angle D \cong \angle A$, $y = 2x$ o $y = 72$.

5.2 Demostración de un Principio sobre Trapezoides Expresado en Palabras
Demostrar que los ángulos base de un trapezoide son congruentes.

Dado: el trapezoide isósceles *ABCD*
($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle D$
Plan: Trace $\perp^s$ a la base desde *B* y *C*.
demuéstrese $\triangle \mathrm{I} \cong \mathrm{II}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{AD}$	1. Una $\perp$ puede trazarse a una línea desde un punto exterior.
2. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	2. Dado
3. $\overline{BE} \cong \overline{CF}$	3. Líneas paralelas son equidistantes en todo lugar.
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. Las perpendiculares forman $\angle^s$. Todos los $\angle^s$ son congruentes.
5. $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$	5. hy. leg $\cong$ hy. leg
6. $\angle A \cong \angle D$	6. Partes correspondientes de $\triangle^s$ son congruentes.

5.2 PARALELOGRAMOS

Un *paralelogramo* es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. El símbolo de paralelogramo es $\square$. Así en el $\square ABCD$ en la figura 5-5, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

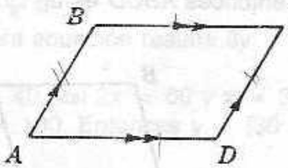


Fig. 5-5

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces éste es un paralelogramo. (Éste es el converso de la definición anterior.) Así si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un $\square$.

5.2A Principios que incluyen propiedades de los paralelogramos

PRINCIPIO 1: *los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.* (Ésta es la definición.)

PRINCIPIO 2: *la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.*
$\overline{BD}$ es la diagonal del $\square ABCD$, en la figura 5-6, por lo que $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$.

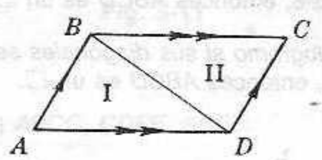


Fig. 5-6

PRINCIPIO 3: *los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.*
En el $\square ABCD$ de la figura 5-5, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

PRINCIPIO 4: *los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.*
En el $\square ABCD$, $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$.

PRINCIPIO 5: *los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.*
En el $\square ABCD$, $\angle A$ es el suplemento de $\angle B$ y también de $\angle D$.

PRINCIPIO 6: *las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.*
En el $\square ABCD$, en la figura 5-7, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{ED}$.

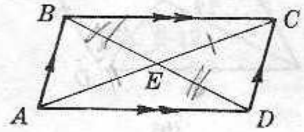


Fig. 5-7

5.2B Demostración de que un cuadrilátero es un paralelogramo

Principio 7: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos.*
Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 8: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son congruentes.*
Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Fig. 5-8

Principio 9: *un cuadrilátero es un paralelogramo si dos de sus lados son congruentes y paralelos.*
Si $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 10: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son congruentes.*
Si $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 11: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus diagonales se bisectan entre sí.*
Si $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{ED}$ en la figura 5-9, entonces $ABCD$ es un $\square$.

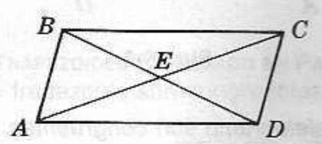
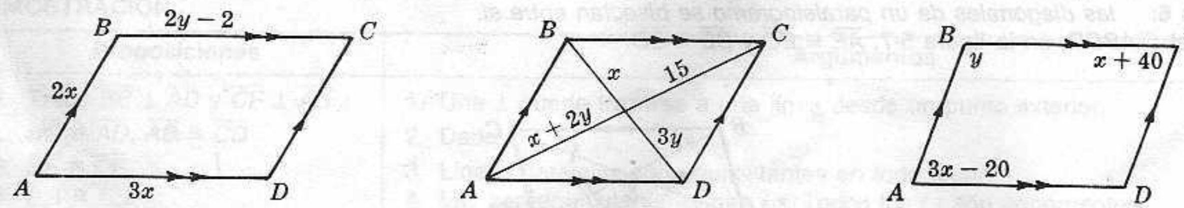


Fig. 5-9

PROBLEMAS RESUELTOS

5.3 Aplicación de Propiedades de los Paralelogramos
Suponiendo que $ABCD$ es un paralelogramo, calcule x y y en cada uno de los incisos de la figura 5-10.



(*a*) Perímetro = 40. (*b*) (*c*)

Fig. 5-10

Soluciones

(*a*) Por el principio 3, $BC = AD = 3x$ y $CD = AB = 2x$; entonces $2(2x + 3x) = 40$, de modo que $10x = 40$ o $x = 4$.
Por el principio 3, $2y - 2 = 3x$; entonces $2y - 2 = 3(4)$, de modo que $2y = 14$ o $y = 7$.

(*b*) Por el principio 6, $x + 2y = 15$ y $x = 3y$.
Sustituyendo $3y$ por x en la primera ecuación resulta $3y + 2y = 15$ o $y = 3$. Entonces $x = 3y = 9$.

(*c*) Por el principio 4, $3x - 20 = x + 40$, así $2x = 60$ y $x = 30$.
Por el principio 5, $y + (x + 40) = 180$. Entonces $y + (30 + 40) = 180$ o $y = 110$.

5.4 Aplicación del Principio 7 en la Determinación de Paralelogramos

Identifique los paralelogramos en cada uno de los incisos de la figura 5-11.

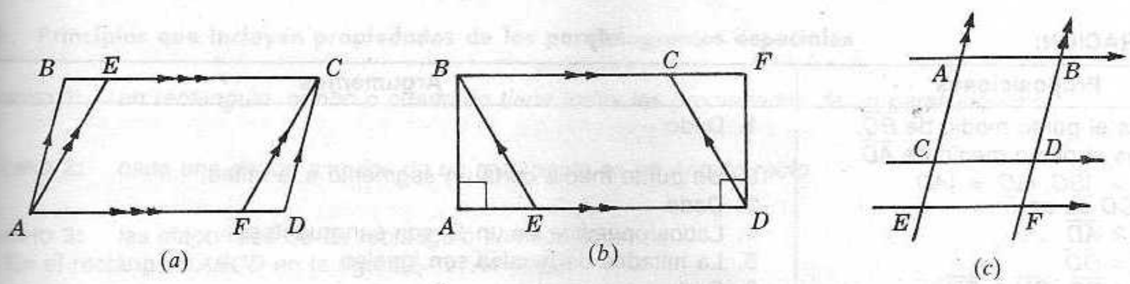


Fig. 5-11

Soluciones

(*a*) *ABCD*, *AECF*; (*b*) *ABFD*, *BCDE*; (*c*) *ABDC*, *CDFE*, *ABFE*.

5.5 Aplicación de los Principios 9, 10 y 11

Explique por qué *ABCD* es un paralelogramo en cada uno de los incisos de la figura 5-12.

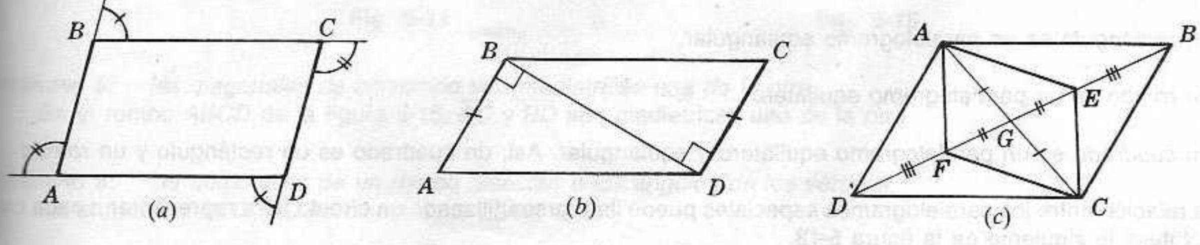


Fig. 5-12

Soluciones

(*a*) Como los suplementos de ángulos congruentes son congruentes, los ángulos opuestos de *ABCD* son congruentes. Por el principio 10, *ABCD* es un paralelogramo.

(*b*) Como las perpendiculares a una misma línea son paralelas, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Entonces, por el principio 9, *ABCD* es un paralelogramo.

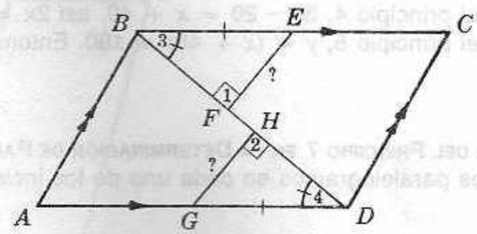
(*c*) Por el axioma de adición, $\overline{DG} \cong \overline{GB}$. Entonces, por el principio 11, *ABCD* es un paralelogramo.

5.6 Resolución de Problemas sobre Paralelogramos

Dado: $\square ABCD$
E es el punto medio de $\overline{BC}$.
G es el punto medio de $\overline{AD}$.
$\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{GH} \perp \overline{BD}$

Demuéstrese: $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

Plan: demuéstrese $\triangle BFE \cong \triangle GHD$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. E es el punto medio de $\overline{BC}$. G es el punto medio de $\overline{AD}$.	1. Dado
2. $BE = \frac{1}{2}BC$, $GC = \frac{1}{2}AD$	2. Un punto medio corta un segmento a la mitad.
3. *ABCD* es un $\square$	3. Dado
4. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	4. Lados opuestos de un $\square$ son congruentes.
5. $\overline{BE} \cong \overline{GD}$	5. La mitades de iguales son iguales.
6. $\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{GH} \perp \overline{BD}$	6. Dado
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las perpendiculares forman $\angle$s rectos. $\angle$s rectos son congruentes.
8. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	8. Lados opuestos de un $\square$ son $\parallel$.
9. $\angle 3 \cong \angle 4$	9. $\angle$s alternos internos de líneas $\parallel$ son $\cong$.
10. $\triangle BFE \cong \triangle GHD$	10. s.a.a. $\cong$ s.a.a.
11. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$	11. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son $\cong$.

5.3 PARALELOGRAMOS ESPECIALES: RECTÁNGULO, ROMBO, CUADRADO

5.3A Definiciones y relaciones entre paralelogramos especiales

Los rectángulos, rombos y cuadrados pertenecen al conjunto de los paralelogramos. Cada uno de éstos puede definirse como un paralelogramo, de la siguiente forma:

1. Un *rectángulo* es un paralelogramo equiangular.
2. Un *rombo* es un paralelogramo equilátero.
3. Un *cuadrado* es un paralelogramo equilátero y equiangular. Así, un cuadrado es un rectángulo y un rombo.

La relación entre los paralelogramos especiales puede ilustrarse utilizando un círculo para representar a cada conjunto. Nótese lo siguiente en la figura 5-13.

1. Como todo rectángulo y todo rombo debe ser un paralelogramo, los círculos para el conjunto de rectángulos y para el conjunto de rombos deben estar dentro del círculo para el conjunto de paralelogramos.
2. Como todo cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo, la intersección indicada por la sección sombreada debe representar un conjunto de cuadrados.

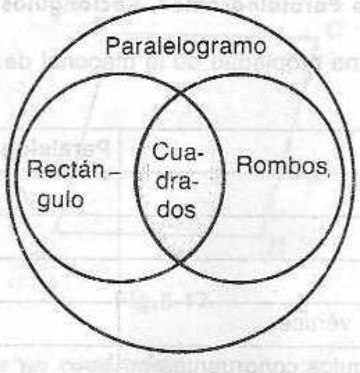


Fig. 5-13

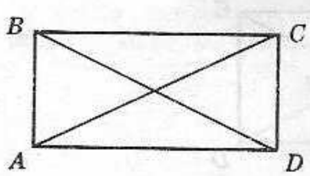
5.3B Principios que incluyen propiedades de los paralelogramos especiales

Principio 1: *un rectángulo, rombo o cuadrado tiene todas las propiedades de un paralelogramo.*

Principio 2: *cada uno de los ángulos de un rectángulo es un ángulo recto.*

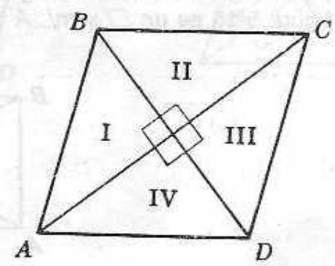
Principio 3: *las diagonales de un rectángulo son congruentes.*
En el rectángulo $ABCD$ en la figura 5-14, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Principio 4: *todos los lados de un rombo son congruentes.*



Rectángulo

Fig. 5-14



Rombo

Fig. 5-15

Principio 5: *las diagonales de un rombo son mediatrices una de la otra.*
En el rombo $ABCD$ de la figura 5-15, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son mediatrices una de la otra.

Principio 6: *las diagonales de un rombo bisectan a los ángulos de los vértices.*
En el rombo $ABCD$, $\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle A$ Y $\angle C$.

Principio 7: *las diagonales de un rombo forman triángulos congruentes.*
Así, en el rombo $ABCD$, $\triangle I \cong \triangle II \cong \triangle III \cong \triangle IV$.

Principio 8: *un cuadrado tiene a la vez las propiedades de los rombos y las de los rectángulos.*
Por definición, un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo.

5.3C Propiedades de las Diagonales de Paralelogramos, Rectángulos, Rombos y Cuadrados

Cada flecha en la tabla siguiente, indica una propiedad de la diagonal de la figura.

Propiedades de las diagonales	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Las diagonales se bisectan entre sí.	√	√	√	√
Las diagonales son congruentes.		√		√
Las diagonales son perpendiculares.			√	√
Las diagonales bisectan los ángulos del vértice.			√	√
Las diagonales forman 2 pares de triángulos congruentes.	√	√	√	√
Las diagonales forman 4 triángulos congruentes.			√	√

5.3D Demostración de que un paralelogramo es un rectángulo, rombo o cuadrado

Demostración de que un paralelogramo es un rectángulo

La definicion básica o mínima de un rectángulo es ésta: un *rectángulo es un paralelogramo que tiene un ángulo recto.* Como los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios; si uno de los ángulos es un ángulo recto, los ángulos restantes deben ser ángulos rectos.

El converso de esta definición básica proporciona un método útil para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo y es la siguiente:

PRINCIPIO 9: *si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.*
Si $ABCD$ en la figura 5-16 es un $\square$ y $m\angle A = 90°$, entonces $ABCD$ es un rectángulo.

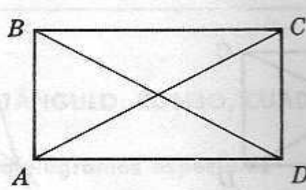


Fig. 5-16

PRINCIPIO 10: *si un paralelogramo tiene diagonales congruentes, entonces es un rectángulo.*
Si $ABCD$ es un $\square$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Demostración de que un paralelogramo es un rombo

La definición básica o mínima de rombo es ésta: *un rombo es un paralelogramo que tiene dos lados adyacentes congruentes.*

El converso de esta definición básica proporciona un método útil para demostrar que un paralelogramo es un rombo y es el siguiente:

PRINCIPIO 11: *si un paralelogramo tiene lados adyacentes congruentes, entonces es un rombo.*
En la figura 5-17 si $ABCD$ es un $\square$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un rombo.

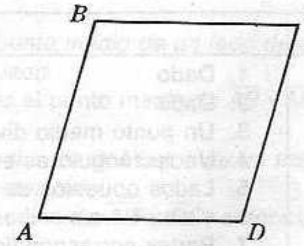


Fig.5-17

Demostración de que un paralelogramo es un cuadrado

PRINCIPIO 12: *si un paralelogramo tiene un ángulo recto y dos lados adyacentes congruentes, entonces es un cuadrado.*

Esto resulta del hecho de que un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.7 ÁLGEBRA APLICADA A LOS ROMBOS

Supóngase que *ABCD* es un rombo, calcule *x* y *y* para cada una de las secciones de la figura 5-18.

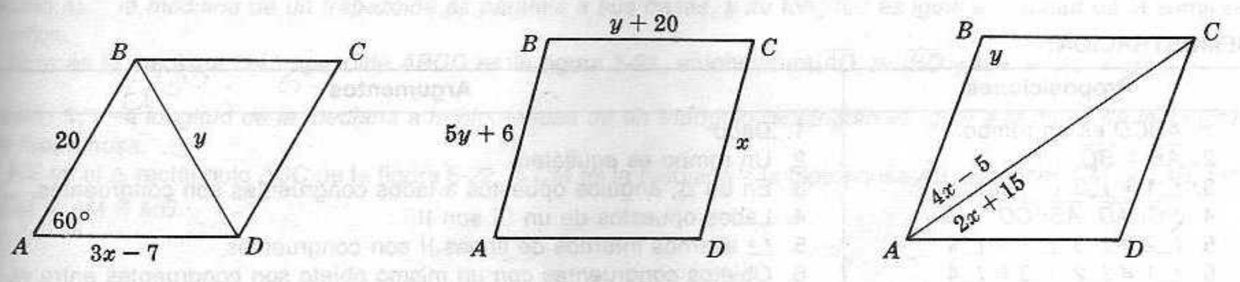


Fig. 5-18

Soluciones

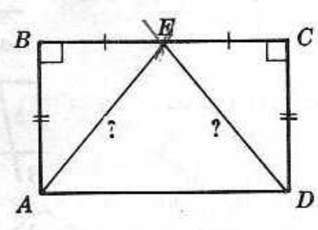
(*a*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $3x - 7 = 20$ o $x = 9$. Como $\triangle ABD$ es equiangular éste es equilátero, de aquí $y = 20$.

(*b*) Como $\overline{BC} \cong \overline{AB}$, $5y + 6 = y + 20$ o $y = 3\frac{1}{2}$. Como $\overline{CD} \cong \overline{BC}$, $x = y + 20$ o $x = 23\frac{1}{2}$.

(*c*) Como $\overline{AC}$ bisecta al $\angle A$, $4x - 5 = 2x + 15$ o $x = 10$. Entonces, $2x + 15 = 35$ y $m\angle A = 2(35°) = 70°$. Como $\angle B$ y $\angle A$ son suplementarios, $y + 70 = 180$ o $y = 110$.

5.8 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE PARALELOGRAMOS ESPECIALES

Dado: el rectángulo *ABCD*
E el punto medio de $\overline{BC}$.
Demuéstrese: $\overline{AE} \cong \overline{ED}$
Plan: demuéstrese que $\triangle AEB \cong \triangle CED$.



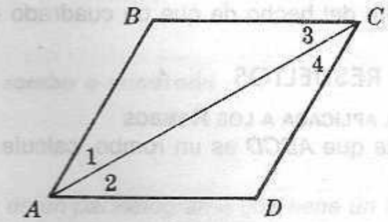
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $ABCD$ es un rectángulo.	1. Dado
2. E es el punto medio de $\overline{BC}$.	2. Dado
3. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$	3. Un punto medio divide una línea en dos partes congruentes.
4. $\angle B \cong \angle C$	4. Un rectángulo es equiangular.
5. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	5. Lados opuestos de un ▱ son congruentes.
6. $\triangle AEB \cong \triangle CED$	6. s.a.s. ≅ s.a.s.
7. $\overline{AE} \cong \overline{ED}$	7. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son congruentes.

5.9 Resolución de Problemas sobre Paralelogramos Especiales Expresados en Palabras

Demuéstrese que la diagonal de un rombo bisecta cada uno de los ángulos por los que pasa.

Solución



Dado: Rombo $ABCD$
$\overline{AC}$ es una diagonal

Demuéstrese: AC bisecta al $\angle A$ y al $\angle C$.

Plan: demuéstrese (1) $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes con $\angle 3$.
(2) $\angle 3$ y $\angle 4$ son congruentes con $\angle 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $ABCD$ es un rombo.	1. Dado
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	2. Un rombo es equilátero.
3. $\angle 1 \cong \angle 3$	3. En un $\triangle$, ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.
4. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	4. Lados opuestos de un ▱ son $\parallel$.
5. $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 4$	5. $\angle$s alternos internos de líneas $\parallel$ son congruentes.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$	6. Objetos congruentes con un mismo objeto son congruentes entre sí.
7. $\overline{AC}$ bisecta al $\angle A$ y al $\angle C$	7. Dividir en dos partes congruentes es bisectar.

5.4 TRES O MÁS PARALELAS; MEDIANAS Y PUNTOS MEDIOS

5.4A Tres o más paralelas

Principio 1: *si tres o más paralelas cortan segmentos congruentes de una línea transversal, entonces cortan segmentos congruentes de cualquier otra línea transversal.*

Si en la figura 5-19 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, y los segmentos a y b de la línea transversal $\overleftrightarrow{AB}$ son congruentes, entonces los segmentos c y d de la línea transveral $\overleftrightarrow{CD}$ son congruentes.

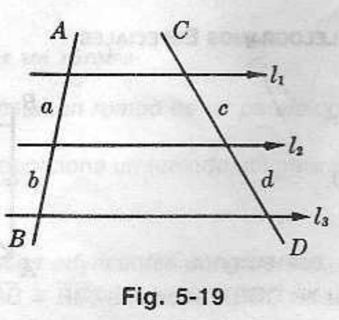


Fig. 5-19

5.9 Principios sobre puntos medios y medianas de triángulos y trapezoides

PRINCIPIO 2: *si se traza una línea desde el punto medio de un lado de un triángulo, paralela al segundo lado, entonces ésta pasa por el punto medio del tercer lado.*

Así, en el $\triangle ABC$, de la figura 5-20, si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, entonces N es el punto medio de $\overline{BC}$.

PRINCIPIO 3: *si una línea une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces ésta es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad del largo del tercer lado.*

En el $\triangle ABC$, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $MN = \frac{1}{2}AC$.

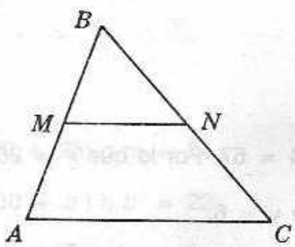


Fig. 5-20

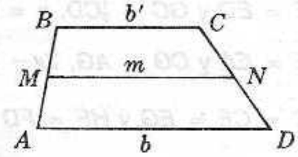


Fig. 5-21

PRINCIPIO 4: *la mediana de un trapezoide es paralela a sus bases, y su longitud es igual a la mitad de la suma de sus lados.*

Si m es la mediana del trapezoide $ABCD$ en la figura 5-21, entonces $m \parallel \overline{AD}$, $m \parallel \overline{BC}$ y $mn = \frac{1}{2}(b + b')$.

PRINCIPIO 5: *la longitud de la mediana a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.*

Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 5-22, si $\overline{CM}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$, entonces $CM = \frac{1}{2}AB$; esto es, $\overline{CM} \cong \overline{AM} \cong \overline{MB}$.

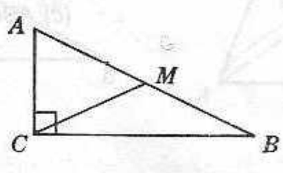


Fig. 5-22

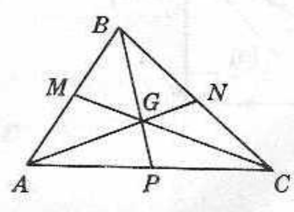


Fig. 5-23

PRINCIPIO 6: *las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que está a dos tercios de la distancia que hay desde cualquier vértice al punto medio del lado opuesto.*

Así si $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CM}$ son las medianas del $\triangle ABC$ en la figura 5-23, entonces éstas se intersectan en el punto G el cual está a dos tercios de la distancia desde A a N, B a P y C a M.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.10 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 1 A TRES O MÁS PARALELAS

Calcule x y y en cada una de las secciones de la figura 5-24.

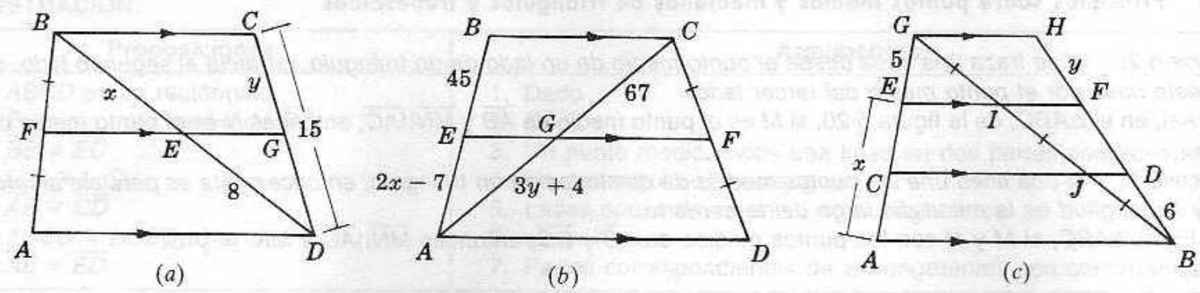


Fig. 5-24

Soluciones

(*a*) Como $BE = ED$ y $GC = \frac{1}{2}CD$, $x = 8$ y $y = 7\frac{1}{2}$.

(*b*) Como $BE = EA$ y $CG = AG$, $2x - 7 = 45$ y $3y + 4 = 67$. Por lo que $x = 26$ y $y = 21$.

(*c*) Como $AC = CE = EG$ y $HF = FD = DB$, $x = 10$ y $y = 6$.

5.11 Aplicación de los Principios 2 y 3

Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-25.

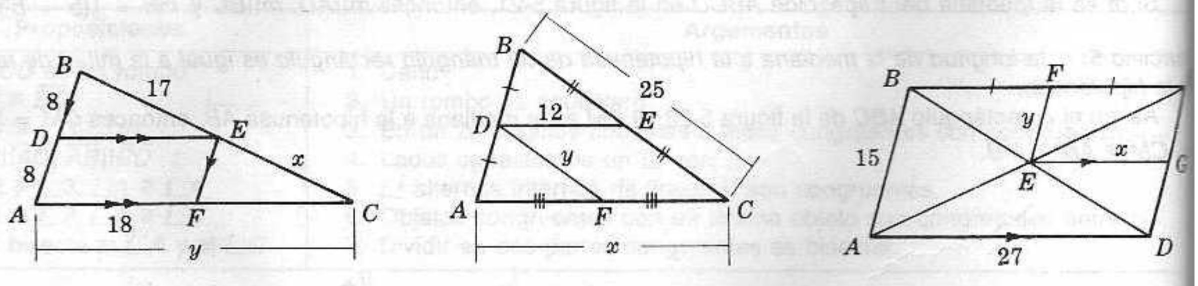


Fig. 5-25

Soluciones

(*a*) Por el principio 2, E es el punto medio de $\overline{BC}$ y F es el punto medio de $\overline{AC}$. Por lo que $x = 17$ y $y = 3$

(*b*) Por el principio 3, $DE = \frac{1}{2}AC$ y $DF = \frac{1}{2}BC$. Por lo que $x = 24$ y $y = 12\frac{1}{2}$.

(*c*) Como $ABCD$ es un paralelogramo, E es el punto medio de $\overline{AC}$. Entonces por el principio 2, G es el pun medio de $\overline{CD}$.
Por el principio 3, $x = \frac{1}{2}(27) = 13\frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}(15) = 7\frac{1}{2}$.

5.12 Aplicación del Principio 4 a la Mediana de un Trapezoide

Si $\overline{MP}$ es la mediana del trapezoide $ABCD$ en la figura 5-26,

(*a*) Calcule m si $b = 20$ y $b' = 28$.

(b) Calcule b' si $b = 30$ y $m = 26$.

(c) Calcule b si $b' = 35$ y $m = 40$.

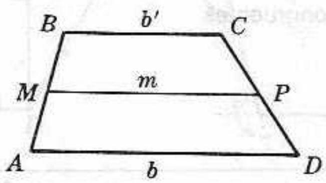


Fig. 5-26

Soluciones

(a) $m = \frac{1}{2}(20 + 28)$ o $m = 24$

(b) $26 = \frac{1}{2}(30 + b')$ o $b' = 22$

(c) $40 = \frac{1}{2}(b + 35)$ o $b = 45$

5.13 Aplicación de los Principios 5 y 6 a las Medianas de un Triángulo

Calcule x y y en cada uno de los casos de la figura 5-27.

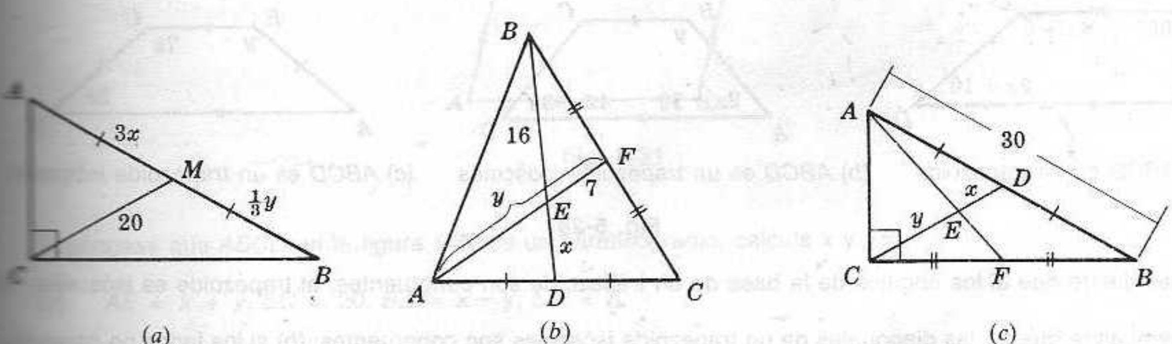


Fig. 5-27

Soluciones

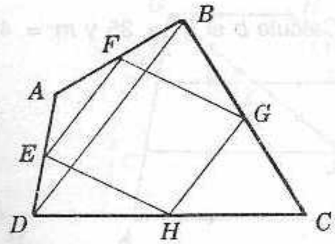
(a) Como $AM = MB$, $\overline{CM}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces por el principio 5, $3x = 20$ y $\frac{1}{3}y = 20$. De aquí $x = 6\frac{2}{3}$ y $y = 60$.

(b) $\overline{BD}$ y $\overline{AF}$ son medianas del $\triangle ABC$. Entonces por el principio 6, $x = \frac{1}{2}(16) = 8$ y $y = 3(7) = 21$.

(c) $\overline{CD}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$; entonces por el principio 5, $CD = 15$. $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$ son medianas del $\triangle ABC$; entonces por el principio 6, $x = \frac{1}{3}(15) = 5$ y $y = \frac{2}{3}(15) = 10$.

5.14 Resolución de Problemas sobre el Punto Medio

Dado: el cuadrilátero $ABCD$
E, F, G y H puntos medios de
$\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.
Demuéstrese: $EFGH$ es un ▱.
Plan: demuéstrese que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son congruentes y paralelos.

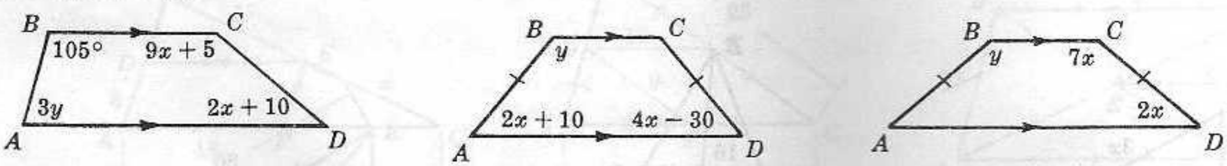


DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BD}$.	1. Puede trazarse un segmento entre dos puntos cualesquiera.
2. E, F, G y H son puntos medios.	2. Dado.
3. $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{GH} \parallel \overline{BD}$ $EF = \frac{1}{2}BD$, $GH = \frac{1}{2}BD$	3. Una línea que une los puntos medios de dos lados de un △ es paralela al tercer lado, y su longitud es igual a la mitad del tercer lado.
4. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$	4. Dos líneas paralelas a una tercera línea son paralelas entre sí.
5. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$	5. Los segmentos con la misma longitud son congruentes.
6. $EFGH$ es un ▱	6. Si dos lados de un cuadrilátero son ≅ y ∥, el cuadrilátero es un ▱.

Problemas complementarios

1. Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-28. (5.1



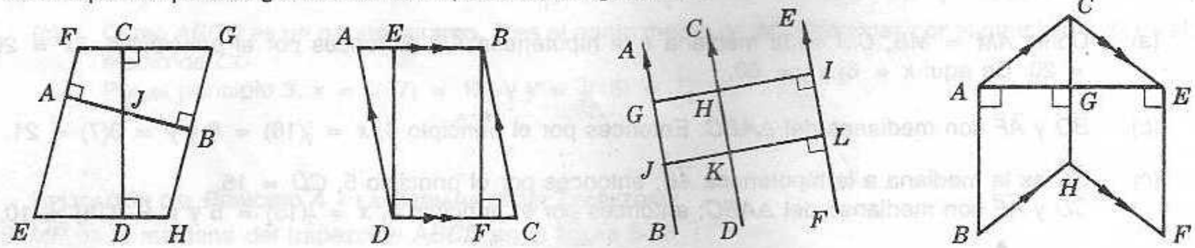
(*a*) $ABCD$ es un trapezoide (*b*) $ABCD$ es un trapezoide isósceles (*c*) $ABCD$ es un trapezoide isósceles

Fig. 5-28

2. Demuestre que si los ángulos de la base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es isósceles. (5.2

3. Demuestre que (*a*) las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes; (*b*) si los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapezoide isósceles se extienden hasta que se intersecten en E, el triángulo ADE formado de ést forma es isósceles. (5.2

4. Identifique los paralelogramos en cada parte de la figura 5-29. (5.4



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Fig. 5-29

5. Explique por qué $ABCD$, en cada uno de los casos de la figura 5-30, es un paralelogramo. (5.5)

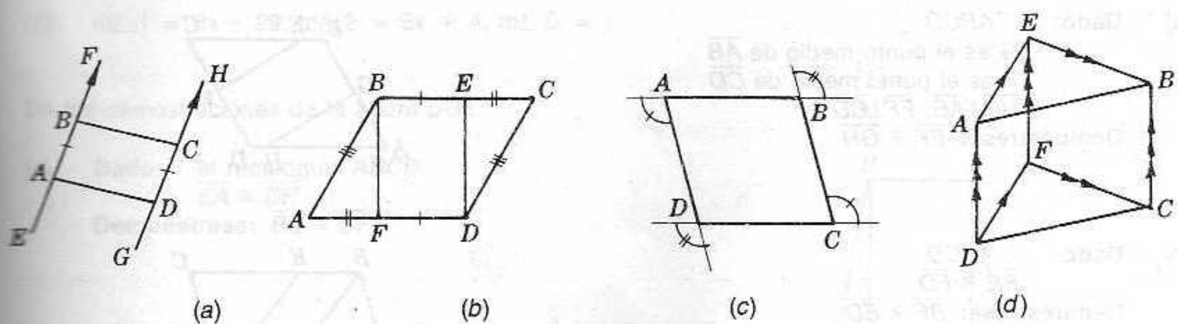


Fig. 5-30

6. Supóngase que $ABCD$ en la figura 5-31 es un paralelogramo, calcule x y y si: (5.3)

(a) $AD = 5x$, $AB = 2x$, $CD = y$, perímetro $= 84$.

(b) $AB = 2x$, $BC = 3y + 8$, $CD = 7x - 25$, $AD = 5y - 10$

(c) $m\angle A = 4y - 60$, $m\angle C = 2y$, $m\angle D = x$

(d) $m\angle A = 3x$, $m\angle B = 10x - 15$, $m\angle C = y$

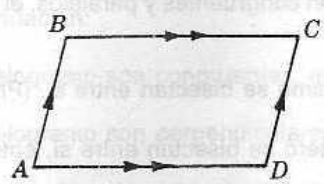


Fig. 5-31

7. Supóngase que $ABCD$ en la figura 5-32 es un paralelogramo, calcule x y y si:

(a) $AE = x + y$, $EC = 20$, $BE = x - y$, $ED = 8$

(b) $AE = x$, $EC = 4y$, $BE = x - 2y$, $ED = 9$

(c) $AE = 3x - 4$, $EC = x + 12$, $BE = 2y - 7$, $ED = x - y$

(d) $AE = 2x + y$, $AC = 30$, $BE = x + y$, $BD = 24$

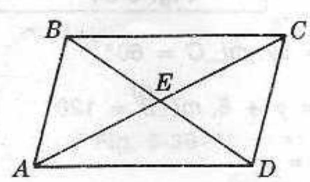


Fig. 5-32

8. Haga las demostraciones que se piden en la figura 5-33.

(*a*) **Dado:** $\square ABCD$
G es el punto medio de $\overline{AB}$
F es el punto medio de $\overline{CD}$
$\overline{HG} \perp \overline{AB}$, $\overline{EF} \perp \overline{CD}$
Demuéstrese: $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

(*b*) **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BE} \cong \overline{FD}$
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{ED}$

(*c*) **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BF}$ bisecta al $\angle B$,
$\overline{ED}$ bisecta al $\angle D$.
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{ED}$

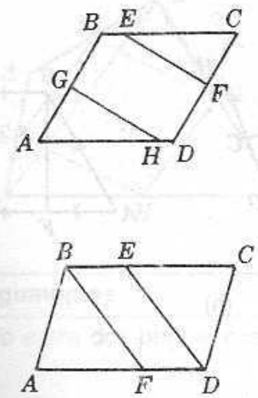


Fig. 5-33

9. Demuéstrese lo que se pide a continuación:

(*a*) Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. (Principio 3.)

(*b*) Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo (Principio 8.)

(*c*) Si dos lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo. (Principio 9.)

(*d*) Las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí. (Principio 6.)

(*e*) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo (Principio 11.)

10. Supóngase que *ABCD* en la figura 5-34 es un rombo, calcule x y y si: (5.7)

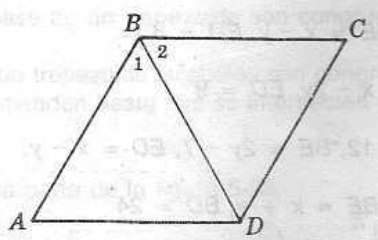


Fig. 5-34

(*a*) $BC = 35$, $CD = 8x - 5$, $BD = 5y$, $m\angle C = 60°$

(*b*) $AB = 43$, $AD = 4x + 3$, $BD = y + 8$, $m\angle B = 120°$

(*c*) $AB = 7x$, $AD = 3x + 10$, $BC = y$

(*d*) $AB = x + y$, $AD = 2x - y$, $BC = 12$

(*e*) $m\angle B = 130°$, $m\angle 1 = 3x - 10$, $m\angle A = 2y$

(*f*) $m\angle 1 = 8x - 29$, $m\angle 2 = 5x + 4$, $m\angle D = y$

11. De las demostraciones de la figura 5-35. (5.8)

(*a*) **Dado:** el rectángulo *ABCD*
$\overline{EA} \cong \overline{DF}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{CF}$

(*b*) **Dado:** el rectángulo *ABCD*
E, *F*, *G* y *H* son los puntos medios de los lados del rectángulo.
Demuéstrese: *EFGH* es un rombo.

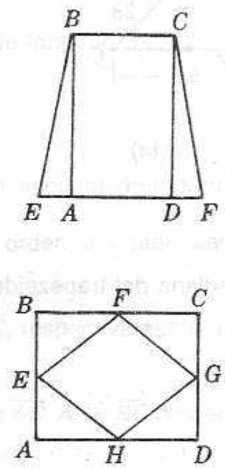


Fig. 5-35

12. Demuéstrese lo que se pide a continuación: (5.9)

(*a*) Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo.

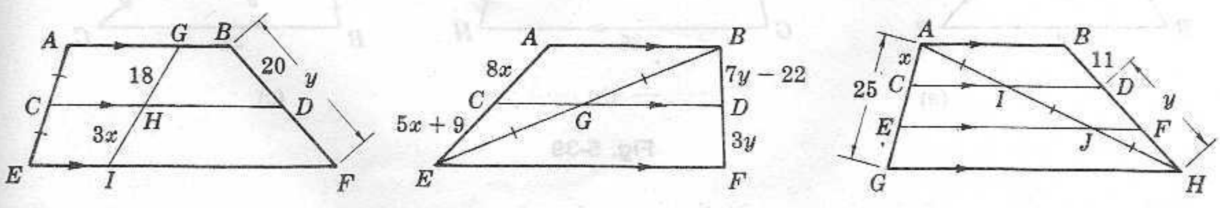
(*b*) Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.

(*c*) Si la diagonal de un paralelogramo bisecta al ángulo del vértice, entonces el paralelogramo es un rombo.

(*d*) Las diagonales de un rombo lo dividen en cuatro triángulos congruentes.

(*e*) Las diagonales de un cuadrado son congruentes.

13. Calcule *x* y *y* en cada uno de los casos de la figura 5-36. (5.10)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 5-36

14. Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-37. (5.11)

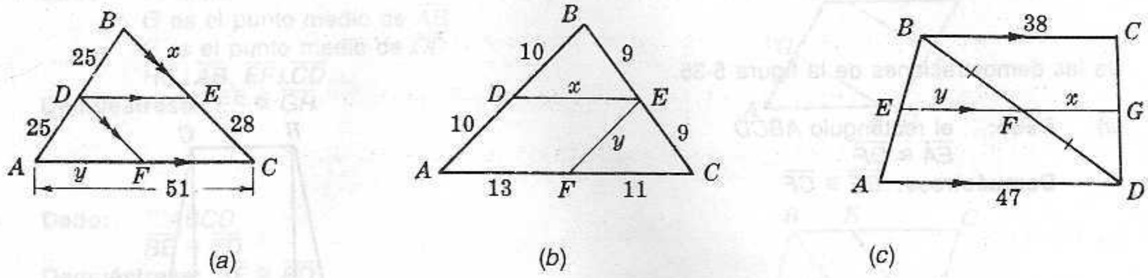


Fig. 5-37

15. Si $\overline{MP}$ es la mediana del trapezoide $ABCD$ en la figura 5-38, (5.12)

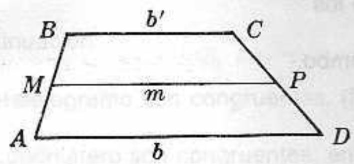


Fig. 5-38

(*a*) Calcule m si $b = 23$ y $b' = 15$.

(*b*) Calcule b' si $b = 46$ y $m = 41$.

(*c*) Calcule b si $b' = 51$ y $m = 62$.

16. Calcule x y y en cada uno de los casos de la figura 5-39. (5.11, 5.12)

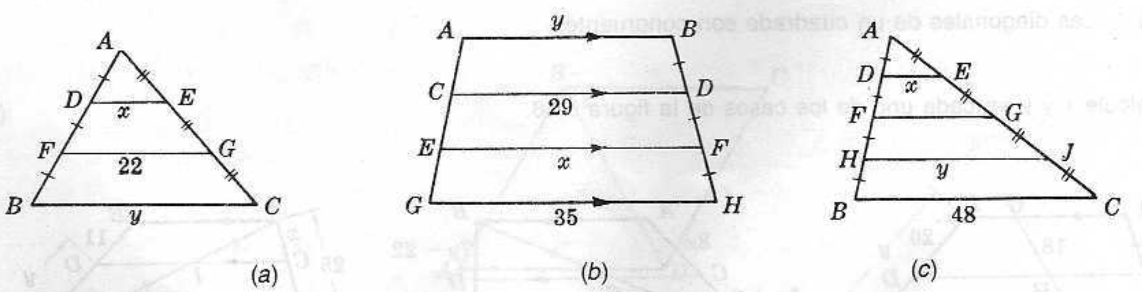


Fig. 5-39

17. En un triángulo rectángulo, (5.13)

(*a*) Calcule la longitud de la mediana a la hipotenusa cuya longitud es 45.

(*b*) Calcule la longitud de la hipotenusa si la longitud de su mediana es 35.

18. Si las medianas del $\triangle ABC$ se intersectan en D, (5.13)

(*a*) Calcule la longitud de la mediana cuyo segmento más corto es 7.

(*b*) Calcule la longitud de la mediana cuyo segmento más largo es 20.

(*c*) Calcule la longitud del segmento más corto de la mediana de longitud 42.

(*d*) Calcule la longitud del segmento más grande de la mediana de longitud 39.

19. Demuéstrese lo siguiente: (5.14)

(*a*) Si los puntos medios de los lados de un rombo se unen en orden, el cuadrilátero formado es un rectángulo.

(*b*) Si los puntos medios de los lados de un cuadrado se unen en orden, el cuadrilátero formado es un cuadrado.

(*c*) En el $\triangle ABC$, sean M, P y Q los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Demuestre que $QMPC$ es un paralelogramo.

(*d*) En el $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$. Si Q, M y P son los puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, demuestre que $QMPC$ es un rectángulo.